



# Eléments finis triangulaires $P_2$ avec condensation de masse pour l'équation des ondes

Gary Cohen, Alexandre Elmkies

## ► To cite this version:

Gary Cohen, Alexandre Elmkies. Eléments finis triangulaires  $P_2$  avec condensation de masse pour l'équation des ondes. [Rapport de recherche] RR-2418, INRIA. 1994. inria-00074257

**HAL Id: inria-00074257**

**<https://inria.hal.science/inria-00074257>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Eléments finis triangulaires  $P_2$  avec condensation  
de masse pour l'équation des ondes***

Gary Cohen, Alexandre Elmekies

**N° 2418**

Septembre 1994

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,

modélisation

et logiciel numérique

 ***apport  
de recherche*****1994**



# Eléments finis triangulaires $P_2$ avec condensation de masse pour l'équation des ondes

Gary Cohen, Alexandre Elmkies\*

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet Ident

Rapport de recherche n ° 2418 — Septembre 1994 — 40 pages

**Résumé :** Ce rapport est consacré à la construction et à l'analyse d'une méthode d'ordre élevé en espace et en temps pour résoudre l'équation des ondes en dimension 1. Cette méthode est fondée sur des éléments finis triangulaires de Lagrange de type  $P_2$  avec condensation de masse, afin d'éviter une inversion de la matrice de masse à chaque pas de temps. La condensation de masse implique l'adjonction aux degrés de liberté  $P_2$  du centre de gravité du triangle afin de pouvoir utiliser une formule de quadrature à poids strictement positifs. Une analyse par Fourier de la méthode sur un maillage régulier met en évidence un résultat de superconvergence. Le gain de précision est illustré par des expériences numériques.

**Mots-clé :** Equation des ondes - Eléments finis d'ordre élevé - Condensation de masse - Analyse par Fourier - Superconvergence.

*(Abstract: pto)*

\*. INRIA, Domaine de Voluceau, B.P.105 78153 Le Chesnay cedex, France.

# $P_2$ triangular finite elements with mass lumping for the wave equation

**Abstract:** This report is devoted to the construction and analysis of a method, higher order in space and time, for solving the 1D wave equation. This method is based on  $P_2$  Lagrange triangular finite elements with mass-lumping which avoids the inversion of a mass matrix at each time-step. The mass-lumping implies to add to the  $P_2$  degrees of freedom the triangle center of gravity in order to use a quadrature rule with strictly positive weights. A Fourier analysis of the method for a regular mesh points out a superconvergence result. The gain of accuracy is illustrated by numerical experiments.

**Key-words:** Wave equation - Higher order finite elements - Mass-lumping - Fourier analysis - Superconvergence.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Position du problème</b>	<b>5</b>
2.1	Formulation variationnelle . . . . .	5
2.2	Méthode des éléments finis . . . . .	5
2.3	Une formule d'intégration numérique pour $P_2$ . . . . .	7
2.4	Formule de Simpson. Élément fini associé. . . . .	8
<b>3</b>	<b>Ecriture des équations.</b>	<b>11</b>
3.1	Equations discrètes. . . . .	11
3.2	Analyse par transformée de Fourier . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Analyse de la stabilité et de la dispersion numérique</b>	<b>20</b>
4.1	Dispersion numérique pour le problème semi-discret. . . . .	20
4.2	Discrétisations en temps d'ordre 2 et 4. . . . .	22
4.3	Analyse de la stabilité . . . . .	24
4.4	Analyse de la dispersion numérique pour l'ordre 2 et l'ordre 4. . .	26
4.5	Ordre de la dispersion numérique . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>32</b>
<b>6</b>	<b>Extension à la dimension 3</b>	<b>37</b>

# 1 Introduction

La résolution de l'équation des ondes en régime transitoire par des méthodes numériques est un problème délicat mais fondamental pour la modélisation d'un grand nombre de phénomènes physiques (acoustique, élastodynamique, électromagnétisme...) pour lesquels l'équation des ondes est un problème modèle. L'approximation numérique de ce type d'équation est indispensable pour deux configurations où les méthodes analytiques sont inutilisables:

- milieux hétérogènes
- domaines de géométrie quelconque

Pour les domaines de géométrie quelconque, même en milieu homogène, les différences finies sont naturellement moins adaptées et moins maniables que les éléments finis. Cependant, en contrepartie de leur maniabilité du point de vue géométrique, les méthodes d'éléments finis présentent un certain nombre d'inconvénients, tels la présence d'une matrice de masse et l'existence d'ondes parasites pour les méthodes d'ordre élevé.

Le but de cette étude est de construire un élément fini triangulaire  $H^1$ -conforme de type  $P_2$  qui assurera une condensation de la matrice de masse et une précision comparable à celle des méthodes de différences finies d'ordre 3 ou 4. Cette précision est classiquement obtenue pour les éléments finis de type  $P_3$  (cf. [1]).

Dans le cas monodimensionnel, une étude complète a déjà été menée et généralisée en dimension 2 au cas triangulaire (cf. [2]). On constate que pour obtenir la condensation de masse, il faut que les degrés de libertés de l'élément de base soient définis aux points des formules de quadrature de Gauss-Lobatto, ce qui entraîne, pour les éléments de degré supérieur ou égal à 3, la modification des nœuds de l'élément.

Ce type d'approche est équivalent aux éléments finis spectraux (cf. [3]), construits en principe pour des maillages quadrilatéraux. L'extension d'une telle méthode aux maillages triangulaires n'est pas immédiate. La difficulté réside dans le fait de trouver l'équivalent des formules de Gauss-Lobatto. Malheureusement, une fois exhibées, ces formules présentent des poids négatifs (pour  $P_3$ ) ou nuls (pour  $P_2$ ). Cela conduit à des schémas instables pour  $P_3$  et sans solution pour  $P_2$ .

Pour pallier cette difficulté, on a développé, dans cette étude, un nouveau type d'éléments finis qui assurent la positivité des poids des formules de quadrature définies sur les nœuds de l'élément. Ceci nous conduit à nous écarter des espaces  $P_k$  standards. Ainsi, pour les éléments de type  $P_2$ , on construit, par adjonction du centre de symétrie du triangle, un élément fini à 7 degrés de liberté noté  $\tilde{P}_2$  où  $\tilde{P}_2 = P_2 \oplus Vect(b)$ ,  $b$  étant la fonction "bulle" (qui vaut 1 au centre de gravité et 0 sur les cotés). Les nœuds de ce nouvel élément coïncident alors avec les points

de la formule de quadrature de Simpson (il s'agit d'une formule bien connue à poids strictement positifs (cf. [4])).

Après avoir écrit la discrétisation obtenue à partir de cet élément fini, on analyse la précision de la méthode (dispersion numérique) puis sa stabilité. Enfin la méthode est mise en œuvre numériquement sur des cas tests.

## 2 Position du problème

### 2.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$$

est donnée par :

Chercher  $u \in V$  tel que  $\forall v \in V, a(u, v) = l(v)$  où :

$$(0.1) \quad \begin{cases} a(u, v) &= \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} uv dx + c^2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ V &= H^1(\Omega) \end{cases}$$

### 2.2 Méthode des éléments finis

On considère comme élément fini de référence le triplet (K,P,B) où

- K est le triangle suivant:

Les degrés de liberté de l'élément se situent alors aux sommets et aux milieux des côtés du triangle (cf. figure1).

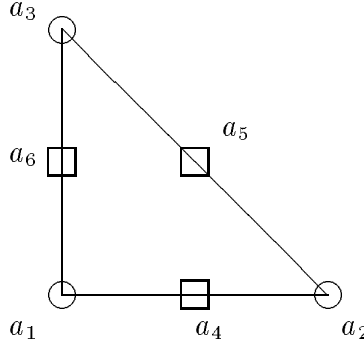
- $P = P_2[X, Y]$
- $B = \{l_i, i = 1, \dots, 6\} \subset P'_2$  avec

$$(0.2) \quad \begin{cases} l_i : P_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow p(a_i) \end{cases}$$

Les fonctions de forme  $\lambda_i, i = 1, \dots, 6$  sont définies par :

$$\forall (i, j) \in [1, 6]^2, \lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$$



FIG. 1 - Degrés de liberté du triangle de référence pour  $P_2$ 

On considère alors une triangulation  $(T_i^h)_{i \in I_h}$  de  $\Omega$  par un maillage régulier de pas  $h$ .

L'espace  $V_h$  est donné par:

$$V_h = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue telle que } \forall i \in I_h, f|_{T_i^h} \in P_2 \right\}$$

Soit  $B_h$  la base de  $V_h$  définie par:

$$B_h = \phi_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \phi_{ij} \in V_h \text{ et } \phi_{ij}(x_p, y_q) = \delta_{ip} \delta_{jq}$$

On écrit alors le problème approché  $P_h$ :

$(P_h)$ : Trouver  $a_h \in V_h$  tel que  $\forall v_h \in V_h$ :

$$(0.3) \quad a(u_h, v_h) = l(v_h)$$

**Remarque:** la théorie des éléments finis établit que si  $a$  vérifie les hypothèses de continuité et de coercivité, on a l'estimation:  $\|u - v_h\| \leq C.d(u, V_h)$

En décomposant  $u_h$  dans la base  $B_h$  et en écrivant l'équation (0.3) pour  $v_h = \phi_{ij}$ , on obtient le système linéaire suivant:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{Z}, \sum_{(k, l) \in \mathbb{Z}} u_{kl}^h a(\phi_{kl}, \phi_{ij}) = 0$$

où on a noté  $u_h = \sum_{(k, l) \in \mathbb{Z}} u_{kl}^h \phi_{kl}$

Ce système s'écrit sous forme matricielle:

$$M^h \frac{d^2}{dt^2} U_h + K^h U_h = 0$$

où

$$(0.4) \quad \begin{cases} M_{ijkl}^h &= \int_{\Omega} \phi_{ij} \phi_{kl} dx \\ K_{ijkl}^h &= c^2 \int_{\Omega} \nabla \phi_{ij} \cdot \nabla \phi_{kl} dx \end{cases}$$

**Remarque:** les intégrales précédentes s'expriment facilement, par décomposition sur chaque triangle du maillage, en fonction des intégrales:

$$\int_{T_i^h} w_k w_l dx \text{ et } \int_{T_i^h} \nabla w_k \cdot \nabla w_l dx$$

où  $w_i$  est définie par:  $\phi_{ij}|_{T_m} = w_i$ .

Plus précisément:

$$M_{ijkl}^h = C(i, j, k, l) \cdot \int_T w_i w_k$$

On exprime ici la correspondance entre les fonctions de base restreintes à un élément et les fonctions de forme (sur l'élément de référence).

Pour diagonaliser  $M^h$ , il suffit donc de diagonaliser la matrice  $m \in M_6(\mathbb{R})$  définie par

$$m_{ij} = \int_K w_i w_j dx.$$

### 2.3 Une formule d'intégration numérique pour $P_2$

On considère une formule d'intégration numérique qui permet d'écrire:

$$\int_K p(x) dx \simeq \sum_{i=1}^6 \omega_i p(d_i)$$

où les poids  $\omega_i$  sont à déterminer (cf. figure 2).

D'après les travaux de Ciarlet dans le cas elliptique, si cette formule d'intégration intègre exactement les polymômes de  $P_2$  (en particulier les termes en  $\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j$ ) et plus généralement les polymômes de  $P_{2k-2}$  si l'élément fini est  $P_k$ , l'erreur introduite dans le calcul d'intégrales de polymômes de  $P_4$  (en particulier les termes en  $\phi_i \phi_j$ ) est de l'ordre de celle introduite par l'approximation en espace.

Ainsi, on écrit:

$$\int_K w_i w_j dx \simeq \sum_{k=1}^6 \omega_k w_i(d_k) w_j(d_k)$$

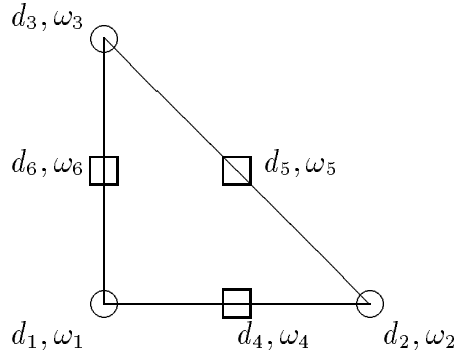


FIG. 2 - Points et poids utilisés pour la condensation de masse  $P_2$ .

D'après la définition des  $w_i$ , il suffit de choisir  $d_k = a_k \forall k = 1, \dots, 6$  pour obtenir:

$$(0.5) \quad \begin{cases} m_{ij} = \int_K w_i w_j dx & \simeq \omega_i \text{ si } i = j \\ & \simeq 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Il faut donc que les points utilisés par la formule de quadrature correspondent aux degrés de liberté de l'élément fini.

**Remarque:** les symétries présentées par K impliquent que:

$$(0.6) \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \\ \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 \end{cases}$$

Or, le calcul des poids de cette formule de quadrature donne :

$$(0.7) \quad \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La matrice de masse est alors singulière et le problème est mal posé. Il faut donc trouver un palliatif à cette difficulté.

## 2.4 Formule de Simpson. Élément fini associé.

L'idée consiste alors à ajouter aux degrés de liberté de l'élément fini le centre de gravité du triangle (cf. figure 3) et aux fonctions de base la fonction "bulle". On note  $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,7}$ , la famille des fonctions de forme associée à notre élément.

Par définition, si on note  $a_i = (x_i, y_i)$ , on a :

$$\forall i, j \in \{1, 7\}, \psi_i(x_i, y_i) = \delta_{ij}$$

On a alors:

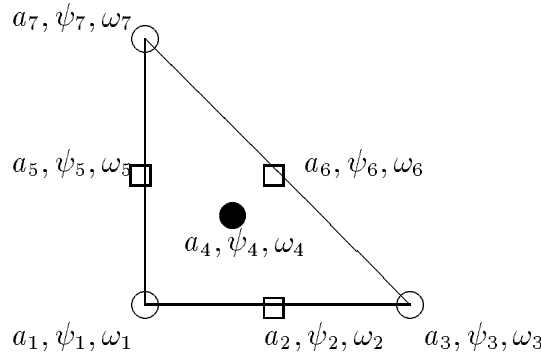


FIG. 3 - Degrés de liberté du triangle de référence pour  $\tilde{P}_2$

$$(0.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{1}{40} \\ \omega_4 = \frac{1}{15} \\ \omega_7 = \frac{9}{40} \end{array} \right.$$

L'élément fini obtenu est constitué par le triplet (K,P,B) avec:

$$(0.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}_2 = P_2 \oplus Vect(\lambda) \text{ où } \lambda \text{ est la fonction "bulle"} \\ B = \{l_i, i = 1 \cdots 7\} \subset \tilde{P}_2' \text{ avec} \end{array} \right.$$

$$(0.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, 7\}, l_i : \tilde{P}_2 \rightarrow \mathbb{R} \\ p \rightarrow p(a_i) \end{array} \right.$$

On a ici:  $P_2 \subset \tilde{P}_2 \subset P_3$ . D'après les travaux de Ciarlet dans le cas elliptique, si l'élément fini considéré  $\tilde{P}$  vérifie  $P_k \subset \tilde{P} \subset P_{k'}$  et que la formule d'intégration est exacte sur  $P_{k+k'-2}$ , alors l'erreur introduite par l'intégration numérique est en

$O(h^{k+1})$ . Ici, la formule de Simpson intègre exactement  $P_3$ . Notre problème est donc au moins en  $O(h^3)$ .

### Calcul des fonctions de forme

On travaille en coordonnées barycentriques. On note ainsi:

$$(0.11) \quad \begin{cases} \lambda_1 &= X \\ \lambda_2 &= Y \\ \lambda_3 &= 1 - (X + Y) \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont les coordonnées barycentriques associées aux points  $a_1, a_2, a_3$  respectivement.

On a déjà  $\psi_7 = \lambda = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

• Calcul de  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ :

On a:  $\psi_1|_{\lambda_3=0} = 0$ ; on peut donc poser:

$$\psi_1 = \alpha[\lambda_3(\lambda_1\lambda_2 + a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3)]$$

où  $\alpha$  est un coefficient de normalisation.

On écrit que  $(\lambda_1\lambda_2 + a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3)(x_i, y_i) = 0 \forall i \in \{4, 5, 6\}$  ce qui donne:

$$(0.12) \quad \begin{cases} a &= -\frac{1}{3} \\ b &= -\frac{1}{3} \\ c &= \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\psi_1(x_1, y_1) = 1$  nous donne:

$$\alpha^{-1} = [\lambda_3(\lambda_1\lambda_2 + a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3)](x_1, y_1) = \frac{1}{3}$$

On a donc:

$$\psi_1 = 3\lambda_3(\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3))$$

Par permutation circulaire on déduit:

$$\psi_2 = 3\lambda_1(\lambda_2\lambda_3 - \frac{1}{3}(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1))$$

$$\psi_3 = 3\lambda_2(\lambda_3\lambda_1 - \frac{1}{3}(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2))$$

• Calcul de  $\psi_4, \psi_5, \psi_6$ :

On a:  $\psi_4|_{\lambda_1=0} = \psi_4|_{\lambda_3=0} = 0$ ; on peut donc poser :

$$(0.13) \quad \begin{cases} \psi_4(x_7, y_7) &= 0 \\ \psi_4(x_4, y_4) &= 1 \end{cases}$$

nous donne :

$$(0.14) \quad \begin{cases} a &= \lambda_2(x_7, y_7) &= \frac{1}{3} \\ \alpha &= \lambda_1\lambda_3(\lambda_2 - a)(x_4, y_4) &= -\frac{1}{12} \end{cases}$$

Donc, on a:

$$\psi_4 = -12\lambda_1\lambda_3(\lambda_2 - \frac{1}{3})$$

Par permutation circulaire on déduit:

$$\begin{aligned} \psi_5 &= -12\lambda_2\lambda_1(\lambda_3 - \frac{1}{3}) \\ \psi_6 &= -12\lambda_3\lambda_2(\lambda_1 - \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

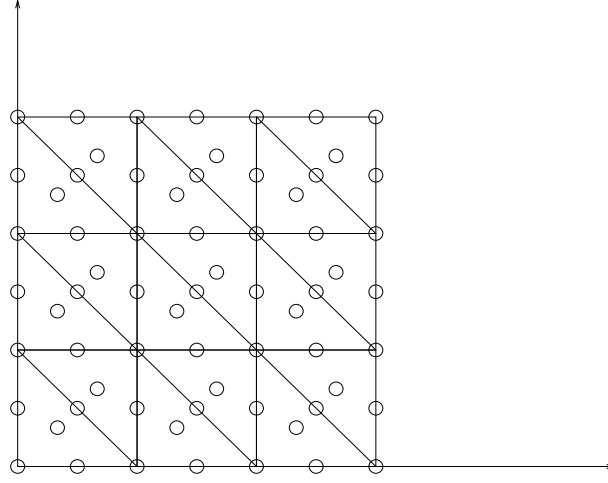
### 3 Ecriture des équations.

#### 3.1 Equations discrètes.

On considère le problème approché sur  $\Omega = \mathbb{R}^2$  qu'on munit d'un maillage régulier (cf. figure 4):

Le problème approché s'écrit:

$$(0.15) \quad (P_h) \quad \begin{cases} u_h \in V_h \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h v_h dx + c^2 \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = 0, \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

FIG. 4 - Maillage triangulaire régulier de pas  $h$ .

où  $V_h = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue t.q. } \forall i \in I_h, f|_{T_i^h} \in \tilde{P}_2\}$ .

Soit  $B_h$  l'ensemble des fonctions de base associé à  $V_h$ . On a :

$$B_h = \{\phi_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } \phi_{ij} \in V_h \text{ et } \phi_{ij}(x_k, y_l) = \delta_{ik}\delta_{jl} \forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \text{ pour } (i, j) \text{ décrivant } \mathbb{Z}^2\}$$

(0.15) est équivalent à :

$$(0.16) \quad P_h \left\{ \begin{array}{l} u_h \in V_h \\ dsp \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^2} u_h \phi_{ij} dx + c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_h \cdot \nabla \phi_{ij} dx = 0, \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \end{array} \right.$$

En décomposant  $u_h$  dans la base  $V_h$ , on obtient :

$$(0.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \frac{d^2}{dt^2} \sum_{(k, l) \in \mathbb{Z}^2} u_{k, l}^h \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{kl} \phi_{ij} dx + \sum_{(k, l) \in \mathbb{Z}^2} u_{k, l}^h \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \phi_{kl} \cdot \nabla \phi_{ij} dx = 0 \\ \text{où } u_h(x, y, t) = \sum_{(k, l) \in \mathbb{Z}^2} u_{k, l}^h(t) \phi_{kl}(x, y) \end{array} \right.$$

Or, la régularité du maillage nous permet de choisir 6 fonctions de base pour lesquelles on écrit l'équation précédente. Les termes en  $\int_{\mathbb{R}^2} \phi_{kl} \phi_{ij} dx$  et en  $\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \phi_{kl} \cdot \nabla \phi_{ij} dx$  étant invariants par des translations de direction  $O_x$  ou de direction  $O_y$  (le Jacobien introduit par le changement de variable est égal à 1), on retrouvera l'écriture de l'équation pour toutes les autres fonctions de base (par ces translations) parmi ces 6 équations. On définit ainsi 6 réseaux de points sur lesquels l'équation est identique (cf. figure 5).

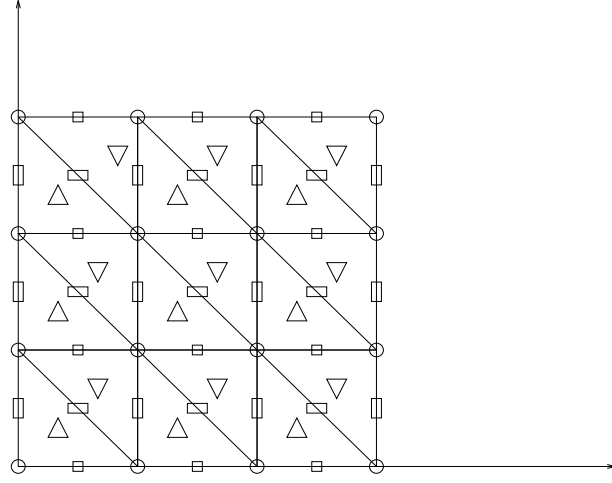


FIG. 5 - Réseaux invariants par symétries

Les 6 réseaux sont ainsi:

$$(0.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{1,h} = \{(ih, jh), (i, j) \in \mathbb{Z}^2\} \\ R_{2,h} = \{((i + \frac{1}{2})h, jh), (i, j) \in \mathbb{Z}^2\} \\ R_{3,h} = \{((i + \frac{1}{3})h, (j + \frac{1}{3})h), (i, j) \in \mathbb{Z}^2\} \\ R_{4,h} = \{(ih, (j + \frac{1}{2})h), (i, j) \in \mathbb{Z}^2\} \\ R_{5,h} = \{((i + \frac{1}{2})h, (j + \frac{1}{2})h), (i, j) \in \mathbb{Z}^2\} \\ R_{6,h} = \{((i + \frac{2}{3})h, (j + \frac{2}{3})h), (i, j) \in \mathbb{Z}^2\} \end{array} \right.$$



On écrit donc:

$$(0.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (\alpha, \beta) \in \{(i, j), (i + \frac{1}{2}, j), (i + \frac{1}{3}, j + \frac{1}{3}), (i, j + \frac{1}{2}), (i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}), (i + \frac{2}{3}, j + \frac{2}{3})\} \\ \frac{d^2}{dt^2} \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,l}^h \int_{\mathbb{H}^2} \phi_{kl} \phi_{\alpha\beta} dx + \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,l}^h \int_{\mathbb{H}^2} \nabla \phi_{kl} \cdot \nabla \phi_{\alpha\beta} dx = 0 \end{array} \right.$$

Notons  $S_{\alpha\beta}$  le support de  $\phi_{\alpha\beta}$ .

Puisque le support de  $\nabla \phi_{\alpha\beta}$  est inclus dans  $S_{\alpha\beta}$ , (0.19) devient:

$$(0.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (\alpha, \beta) \in \{(i, j), (i + \frac{1}{2}, j), (i + \frac{1}{3}, j + \frac{1}{3}), (i, j + \frac{1}{2}), (i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}), (i + \frac{2}{3}, j + \frac{2}{3})\} \\ \frac{d^2}{dt^2} \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,l}^h \int_{S_{\alpha\beta}} \phi_{kl} \phi_{\alpha\beta} dx + \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,l}^h \int_{S_{\alpha\beta}} \nabla \phi_{kl} \cdot \nabla \phi_{\alpha\beta} dx = 0 \end{array} \right.$$

En décomposant les intégrales sur chaque triangle de  $S_{\alpha\beta}$ , on obtient:

$$(0.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (\alpha, \beta) \in \{(i, j), (i + \frac{1}{2}, j), (i + \frac{1}{3}, j + \frac{1}{3}), (i, j + \frac{1}{2}), (i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}), (i + \frac{2}{3}, j + \frac{2}{3})\} \\ \frac{d^2}{dt^2} \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,l}^h \sum_{T \subseteq S_{\alpha\beta}} \int_T \phi_{kl} \phi_{\alpha\beta} dx + \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,l}^h \sum_{T \subseteq S_{\alpha\beta}} \int_T \nabla \phi_{kl} \cdot \nabla \phi_{\alpha\beta} dx = 0 \end{array} \right.$$

Enfin, sur chaque triangle  $T \subseteq S_{\alpha\beta}$ ,  $\phi_{kl}$  et  $\phi_{\alpha\beta}$  correspondent à des fonctions de forme données.

On n'utilisera donc pour l'écriture de ces équations que deux matrices:  $g, m \in M_7(\mathbb{R})$  définies par:

$$(0.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} m(i, j) = \int_K \psi_i \psi_j dx \\ g(i, j) = \int_K \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dx \end{array} \right.$$

**Remarque:** les intégrales de la matrice  $m$  doivent être calculées à l'aide de la formule de Simpson pour obtenir une matrice diagonale. Cependant, les intégrales de la matrice  $g$  peuvent être calculées, soit par la formule de Simpson, ce qui donne une valeur approchée, soit exactement (à l'aide du logiciel MAPLE). Les études de stabilité et de dispersion numérique seront faites dans les deux cas.

Si on note  $g$  la matrice de rigidité calculée exactement et  $g_s$  celle calculée à l'aide de la formule de Simpson, on obtient :

$$g = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{30} & -\frac{9}{10} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{15} & \frac{8}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{9}{5} & 0 & -\frac{8}{15} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{7}{15} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{9}{5} & 0 & \frac{81}{10} & -\frac{9}{5} & -\frac{18}{5} & 0 \\ -\frac{1}{15} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{8}{3} & -\frac{8}{15} & -\frac{7}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{8}{15} & 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{8}{15} & \frac{64}{15} & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

et

$$g_s = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{60} & -\frac{9}{20} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{60} \\ -\frac{4}{15} & \frac{52}{15} & \frac{2}{3} & -\frac{18}{5} & \frac{4}{5} & \frac{4}{15} & 0 \\ \frac{1}{60} & -\frac{2}{3} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{9}{20} & -\frac{18}{5} & \frac{9}{20} & \frac{243}{20} & -\frac{18}{5} & -\frac{27}{5} & \frac{9}{20} \\ -\frac{4}{15} & \frac{4}{5} & 0 & -\frac{18}{5} & \frac{52}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{27}{5} & \frac{4}{15} & \frac{76}{15} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{60} & 0 & -\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{20} \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi les six équations qui suivent dans lesquelles on a utilisé la matrice exacte  $g$ .

– Equation en  $(i, j)$

$$(0.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} 6\omega_1 \frac{d^2}{dt^2} u_{ij} + 3u_{ij} - \frac{1}{5} \left( \frac{1}{3} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + \frac{1}{3} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1}) \right) \\ - \frac{8}{15} (u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}) + \frac{1}{5} (u_{i+\frac{1}{2},j-1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1}) \\ - \frac{9}{10} u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{3}} - \frac{8}{15} (u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{5} (u_{i+1,j-\frac{1}{2}} + u_{i-1,j+\frac{1}{2}}) \\ + \frac{2}{5} (u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) - \frac{9}{10} (u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{3}} + u_{i-\frac{1}{3},j-\frac{1}{3}}) = 0 \end{array} \right.$$

– Equation en  $(i + \frac{1}{2}, j)$

$$(0.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\omega_4 \frac{d^2}{dt^2} u_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{8}{15} (u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{1}{5} (u_{i,j+1} + u_{i+1,j-1}) + \frac{16}{3} u_{i+\frac{1}{2},j} \\ - \frac{9}{5} u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{3}} - \frac{8}{15} (u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) - \frac{9}{5} u_{i+\frac{2}{3},j-\frac{1}{3}} = 0 \end{array} \right.$$

– Equation en  $(i + \frac{1}{3}, j + \frac{1}{3})$

$$(0.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_7 \frac{d^2}{dt^2} u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{3}} - \frac{9}{10} u_{i,j} - \frac{9}{5} u_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{81}{10} u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{3}} \\ - \frac{9}{5} u_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{18}{5} u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0 \end{array} \right.$$

– Equation en  $(i, j + \frac{1}{2})$

$$(0.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\omega_4 \frac{d^2}{dt^2} u_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{8}{15}(u_{i,j} + u_{i,j+1}) + \frac{1}{5}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j+1}) - \frac{9}{5}u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{3}} \\ + \frac{16}{3}u_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{8}{15}(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - \frac{9}{5}u_{i-\frac{1}{3},j+\frac{2}{3}} = 0 \end{array} \right.$$

– Equation en  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$

$$(0.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\omega_4 \frac{d^2}{dt^2} u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}(u_{i,j} + u_{i+1,j+1}) - \frac{8}{15}(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}) - \frac{18}{5}u_{i+\frac{1}{3},j+\frac{1}{3}} \\ - \frac{8}{15}(u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i+1,j+\frac{1}{2}}) + \frac{128}{15}u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \frac{18}{5}u_{i+\frac{2}{3},j+\frac{2}{3}} = 0 \end{array} \right.$$

– Equation en  $(i + \frac{2}{3}, j + \frac{2}{3})$

$$(0.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_7 \frac{d^2}{dt^2} u_{i+\frac{2}{3},j+\frac{2}{3}} - \frac{9}{10}u_{i+1,j+1} - \frac{9}{5}u_{i+\frac{1}{2},j+1} - \frac{9}{5}u_{i+1,j+\frac{1}{2}} \\ - \frac{18}{5}u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{81}{10}u_{i+\frac{2}{3},j+\frac{2}{3}} = 0 \end{array} \right.$$

Les équations obtenues avec  $g_s$  peuvent s'écrire de la même manière.

### 3.2 Analyse par transformée de Fourier

On considère maintenant une famille  $\{w_{i,h}, i = 1, \dots, 6\}$  telle que:

$$\forall i = 1, \dots, 6 \quad w_{i,h}|_{R_{i,h}} = u_{h}|_{R_{i,h}}$$

Puisque les équations discrètes font intervenir les coefficients les valeurs de  $u_h$  aux points des différents réseaux, on obtient le système différentiel vérifié par la famille  $\{w_{i,h}, i = 1, \dots, 6\}$  en remplaçant chaque coefficient par la fonction qui lui correspond. On prend ensuite la transformée de Fourier en espace de ces équations pour obtenir le système différentiel vérifié par la famille  $\{\hat{w}_{i,h}, i = 1, \dots, 6\}$ :

– Equation en  $(i, j)$

$$(0.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} 6\omega_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{w}_{1,h} + \left\{ 3 - \frac{2}{5} \left( \frac{1}{3} \cos(hk_2) + \frac{1}{3} \cos(hk_1) + \cos(h(k_1 - k_2)) \right) \right\} \hat{w}_{1,h} \\ + \left\{ -\frac{16}{15} \cos(h \frac{k_1}{2}) + \frac{2}{5} \cos(h(\frac{k_1}{2} - k_2)) \right\} \hat{w}_{2,h} \\ - \frac{9}{10} e^{ih \frac{k_1+k_2}{3}} \hat{w}_{3,h} - \left\{ \frac{16}{15} \left( \cos(h \frac{k_2}{2}) + \frac{2}{5} \cos(h(k_1 - \frac{k_2}{2})) \right) \right\} \hat{w}_{4,h} \\ + \frac{4}{5} \cos(h \frac{k_1+k_2}{2}) \hat{w}_{5,h} - \frac{9}{5} e^{-ih \frac{k_1+k_2}{3}} \hat{w}_{6,h} = 0 \end{array} \right.$$

– Equation en  $(i + \frac{1}{2}, j)$

$$(0.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\omega_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{w}_{2,h} + \left\{ -\frac{8}{15} (1 + e^{ihk_1}) + \frac{1}{5} (e^{ihk_2} + e^{ih(k_1-k_2)}) \right\} \hat{w}_{1,h} + \frac{16}{3} e^{ih \frac{k_1}{2}} \hat{w}_{2,h} \\ - \frac{9}{5} e^{ih \frac{k_1+k_2}{3}} \hat{w}_{3,h} - \frac{8}{15} (e^{ih \frac{k_1+k_2}{2}} + e^{ih \frac{k_1-k_2}{2}}) \hat{w}_{5,h} - \frac{9}{5} e^{ih \frac{2k_1-k_2}{3}} \hat{w}_{6,h} = 0 \end{array} \right.$$

– Equation en  $(i, j + \frac{1}{2})$

$$(0.31) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\omega_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{ih \frac{k_2}{2}} \hat{w}_{4,h} &+ \left\{ -\frac{8}{15}(1 + e^{ih k_2}) + \frac{1}{5}(e^{ih k_1} + e^{ih(-k_1+k_2)}) \right\} \hat{w}_{1,h} \\ &- \frac{9}{5} e^{ih \frac{k_1+k_2}{3}} \hat{w}_{3,h} + \frac{16}{3} e^{ih \frac{k_2}{2}} \hat{w}_{4,h} \\ &- \frac{8}{15} (e^{ih \frac{k_1+k_2}{2}} + e^{ih \frac{-k_1+k_2}{2}}) \hat{w}_{5,h} - \frac{9}{5} e^{ih \frac{-k_1+2k_2}{3}} \hat{w}_{6,h} = 0 \end{aligned} \right.$$

– Equation en  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$

$$(0.32) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\omega_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{ih \frac{k_1+k_2}{2}} \hat{w}_{5,h} &+ \frac{2}{5} (1 + e^{ih \frac{k_1+k_2}{2}}) \hat{w}_{1,h} - \frac{8}{15} (e^{ih \frac{k_1}{2}} (1 + e^{ih k_2})) \hat{w}_{2,h} \\ &- \frac{18}{5} e^{ih \frac{k_1+k_2}{3}} \hat{w}_{3,h} - \frac{8}{15} (e^{ih \frac{k_2}{2}} (1 + e^{ih k_1})) \hat{w}_{4,h} \\ &+ \frac{128}{15} e^{ih \frac{k_1+k_2}{2}} \hat{w}_{5,h} - \frac{18}{5} e^{2ih \frac{k_1+k_2}{3}} \hat{w}_{6,h} = 0 \end{aligned} \right.$$

– Equation en  $(i + \frac{2}{3}, j + \frac{2}{3})$

$$(0.33) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_7 \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{2ih \frac{k_1+k_2}{3}} \hat{w}_{6,h} - \frac{9}{10} e^{ih(k_1+k_2)} \hat{w}_{1,h} - \frac{9}{5} e^{ih(\frac{k_1}{2}+k_2)} \hat{w}_{2,h} - \frac{9}{5} e^{ih(k_1+\frac{k_2}{2})} \hat{w}_{4,h} \\ - \frac{18}{5} e^{ih \frac{k_1+k_2}{2}} \hat{w}_{5,h} + \frac{81}{10} e^{2ih \frac{k_1+k_2}{3}} \hat{w}_{6,h} = 0 \end{aligned} \right.$$

Ce système différentiel peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\hat{M}_h \frac{d^2}{dt^2} \hat{W}_h + \hat{K}_h \hat{W}_h = 0$$

c'est à dire, en posant  $\hat{N}_h = \hat{M}_h^{-1} \hat{K}_h$  :

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{W}_h = -\hat{N}_h \hat{W}_h$$

L'étude de la stabilité et de la dispersion numérique de la méthode se fera à partir de la matrice  $-\hat{N}_h$  qu'on appelle "symbole de l'opérateur Laplacien discret". Le symbole est ici matriciel du fait que l'on a considéré plusieurs types de points, ce qui a donné un système différentiel.

**Remarque:** le même résultat peut être obtenu par analyse par onde plane, c'est-à-dire en supposant que la solution  $u_h$  est de la forme:

$$u_h = \exp(i(\omega.t - p.k_x - q.k_y)), \text{ pour } (p, q) \in \mathbb{Z}^2$$

## 4 Analyse de la stabilité et de la dispersion numérique

### 4.1 Dispersion numérique pour le problème semi-discret.

La relation de dispersion est, par définition, celle reliant la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $|\vec{k}|$  pour que l'équation des ondes soit satisfaite lorsque l'on lui applique la transformée de Fourier en temps et en espace.

Pour le cas continu, en prenant la transformée de Fourier, on obtient la relation :

$$\omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2$$

où  $c$  désigne la vitesse de l'onde.

Pour le cas semi-discret, on obtient:

$$\frac{d^2}{dt^2} U_h + N_h U_h = 0$$

ce qui donne :

$$\omega_h^2 \hat{U}_h = -\hat{N}_h \hat{U}_h$$

Dans une base diagonalisant  $\hat{N}_h$ , cette relation devient:

$$\forall i \in \{1, 6\}, \omega_{i,h}^2 = \mu_h^i$$

où  $\{\mu_i\}$  désigne le spectre de  $\hat{N}_h$ .

Un bon moyen d'évaluer l'erreur introduite par un schéma numérique consiste à calculer l'erreur faite sur la vitesse de l'onde.

La relation de dispersion obtenue dans le cas continu nous donne la vitesse exacte:

$$c = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

On définit alors, à partir de la relation de dispersion obtenue dans le cas discret, la vitesse approchée:

$$c_h = \frac{\omega_{0,h}}{|\vec{k}|}$$

où  $\omega_{0,h}$  est par définition la pulsation donnée par la valeur propre "physique" de  $\hat{N}_h$  (par définition, c'est celle qui tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0). On la note  $\mu_0^h$ . Les autres valeurs propres dites "parasites" qui sont en  $O(h^{-2})$  correspondent à des ondes dont l'amplitude tend vers 0 et la vitesse tend vers l'infini. Elles apparaissent du fait qu'on a distingué plusieurs types de points auxquels correspondent plusieurs types d'équations.

On obtient :

$$c_h = \frac{\omega_{0,h}}{|\vec{k}|} = \frac{\sqrt{\mu_0^h(k_1, k_2)}}{|\vec{k}|}$$

Pour mesurer l'erreur faite sur la vitesse, on étudie:

$$Q_h = \frac{c_h}{c} = \frac{\omega_h}{\omega}$$

Puisque dans notre étude,  $c = 1$ , on obtient l'expression de  $Q_h$ :

$$Q_h = \frac{\sqrt{\mu_0^h(k_1, k_2)}}{|\vec{k}|}$$

On effectue alors les changements de variable suivants:

$$(0.34) \quad \begin{cases} \mu'_h &= h^2 \mu_0^h \\ K &= \frac{|\vec{k}|h}{2\pi} \end{cases}$$

où  $K$  est l'inverse du nombre d'éléments finis par longueur d'onde, et:

$$(0.35) \quad \begin{cases} k_1 &= |\vec{k}| \cos \psi \\ k_2 &= |\vec{k}| \sin \psi \end{cases}$$

où  $\psi$  est l'angle d'incidence de l'onde. On obtient l'expression de  $Q_h$  pour l'équation semi-discrétisée:



$$Q_h = \frac{\sqrt{\mu'_h(K, \psi)}}{2\pi K}$$

Dans les figures qui suivent, on a tracé, à la même échelle, et pour  $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  les courbes:

$$Q_h = Q_h(K, \psi), K \in [0, \frac{1}{2}]$$

ceci, pour la discrétisation obtenue à partir de la matrice de rigidité calculée exactement et celle obtenue à partir de la matrice de rigidité calculée par la formule de Simpson.

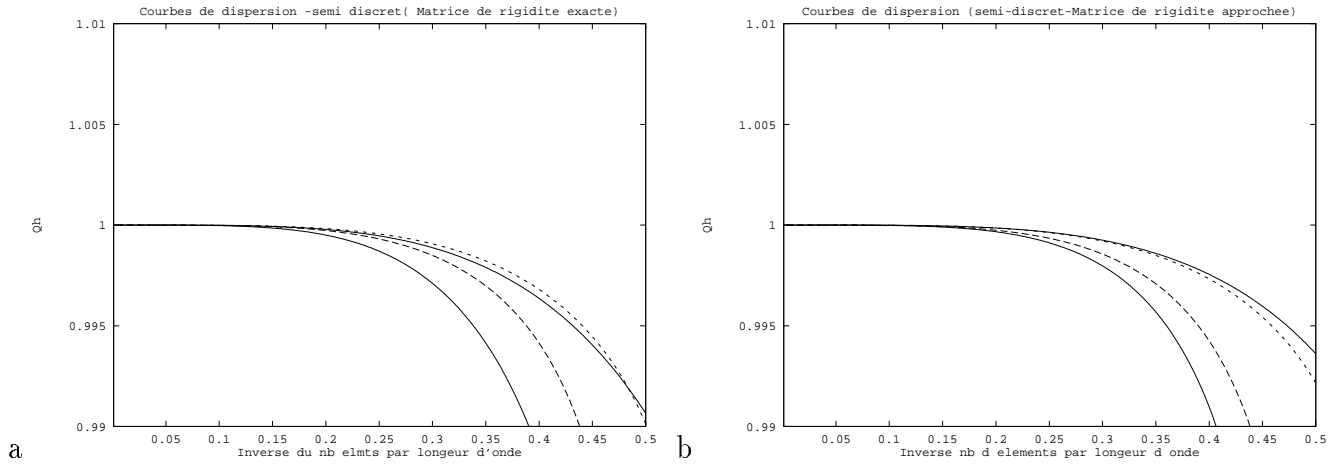


FIG. 6 - *Courbes de dispersion pour la semi-discrétisation en espace (à gauche par le calcul exact et à droite par le calcul approché de la matrice de rigidité). La courbe inférieure correspond à  $\psi = 0^\circ$  et la courbe supérieure à  $\psi = 45^\circ$ .*

## 4.2 Discrétisations en temps d'ordre 2 et 4.

On a écrit, après discrétisation en espace, le problème approché:

$$M^h \frac{d^2}{dt^2} U_h + K^h U_h = 0$$

En notant  $N_h = M^{h^{-1}} K^h$ , on obtient:

$$\frac{d^2}{dt^2}U_h + N_h U_h = 0$$

• Discrétisation d'ordre 2.

On discrétise alors en temps en approchant à l'ordre 2 :

$$\frac{d^2}{dt^2}U_h(t_n) = \frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

où on note  $\{t_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est un maillage régulier en temps et  $U_h^n = U_h(t_n)$   
 Cette discrétisation donne le schéma :

$$\frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + N_h U_h^n = 0$$

• Discrétisation d'ordre 4.

Pour obtenir une discrétisation en temps d'ordre 4, on utilise l'approche de l'équation modifiée.

Ainsi, un développement de Taylor d'ordre 4 de la dérivée seconde de  $U_h$  nous donne :

$$\frac{d^2}{dt^2}U_h(t_n) = \frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{d^4 U_h(t_n)}{dt^4} + O(\Delta t^4)$$

Si  $U_h$  est solution de l'équation semi-discrétisée, on a :

$$\frac{d^2}{dt^2}U_h(t_n) = \frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} N_h^2 U_h + O(\Delta t^4)$$

Par construction, le schéma :

$$\frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + N_h \left( Id - \frac{\Delta t^2}{12} N_h \right) U_h^n = 0$$

est consistant avec l'équation des ondes à l'ordre 4 en temps.

### 4.3 Analyse de la stabilité

Si on assimile  $U_h$  et  $W_h$ , les schémas obtenus après discrétisation en temps sont de la forme:

$$\frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + D_h U_h^n = 0$$

avec:

$$(0.36) \quad \begin{cases} D_h = N_h \text{ pour l'ordre 2;} \\ D_h = N_h(Id - \frac{\Delta t^2}{12} N_h) \text{ pour l'ordre 4;} \end{cases}$$

$D_h(\Delta t)$  est un opérateur auto-adjoint borné dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Donc, la stabilité  $L^2$  du schéma est donné par:

$$D_h(\Delta t) \geq 0 \text{ et } \frac{\Delta t^2}{4} \|D_h(\Delta t)\| \leq 1$$

On introduit alors l'opérateur :

$$\hat{D}_h(\Delta t) = \mathcal{F} D_h(\Delta t)$$

où  $\mathcal{F}$  désigne la transformée de Fourier en espace. Par définition,  $\hat{D}_h$  est obtenue en appliquant la transformée de Fourier en espace aux schémas précédents. Ainsi, on a:

$$(0.37) \quad \begin{cases} \hat{D}_h = \hat{N}_h \text{ pour l'ordre 2;} \\ \hat{D}_h = \hat{N}_h(Id - \frac{\Delta t^2}{12} \hat{N}_h) \text{ pour l'ordre 4;} \end{cases}$$

On obtient alors:

$$(0.38) \quad \begin{cases} \|D_h\| = \|\hat{D}_h\| = \max_{i,K} |\mu_h^i| \text{ pour l'ordre 2;} \\ \|D_h\| = \|\hat{D}_h\| = \max_{i,K} |\mu_h^i (1 - \frac{\Delta t^2}{12} \mu_h^i)| \text{ pour l'ordre 4;} \end{cases}$$

où  $\{\mu_h^i, i = 1, \dots, 6\}$  est le spectre de  $\hat{N}_h$ .

Si  $\hat{N}_h$  est un opérateur positif (il l'est dans notre cas du fait de la positivité des poids de la formule de Simpson), la condition de stabilité devient, pour l'ordre 2:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\max_{i,K} |\mu_h^i|}} \text{ pour l'ordre 2;}$$

Si on pose :

$$(0.39) \quad \begin{cases} \mu_h^i &= h^2 \mu_h^i \\ \alpha &= c \frac{\Delta t}{h} \end{cases}$$

on obtient la condition:

$$\alpha \leq \frac{2}{\sqrt{\max_{i,K} |\mu_h^i|}} \text{ pour l'ordre 2;}$$

Pour l'ordre 4, la stabilité est équivalente à:

$$(0.40) \quad \begin{cases} \frac{\alpha^2}{4} [\mu_h^i (1 - \frac{\Delta t^2}{12} \mu_h^i)] \geq 0, \forall i, K \\ \frac{\alpha^2}{4} [\mu_h^i (1 - \frac{\Delta t^2}{12} \mu_h^i)] \leq 1, \forall i, K \end{cases}$$

L'étude de la deuxième inéquation montre qu'elle est toujours vérifiée. La condition de stabilité pour l'ordre 4 devient donc:

$$\alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\max_{i,K} |\mu_h^i|}}$$

La minimisation en  $K$  est faite sur  $[0, \frac{1}{2}]$ . Cette minimisation est faite numériquement puisqu'on n'a pas d'expression analytique des valeurs propres de  $\hat{N}_h$ . D'autre part, les conditions de stabilité sont étudiées pour la matrice  $\hat{N}_h$  obtenue à partir de la matrice de rigidité calculée exactement et pour celle calculée par la formule de Simpson.

Si on note  $\alpha_{2,max}$  et  $\alpha_{4,max}$  les coefficients maximum permis par la condition de

stabilité de l'ordre 2 et de l'ordre 4 respectivement, on obtient:

- Pour la matrice de rigidité exacte ,

$$(0.41) \quad \begin{cases} \alpha_{2,max} \simeq 0.2187 \\ \alpha_{4,max} \simeq 0.3787 \end{cases}$$

- Pour la matrice de rigidité “approchée”,

$$(0.42) \quad \begin{cases} \alpha_{2,max} \simeq 0.1764 \\ \alpha_{4,max} \simeq 0.3055 \end{cases}$$

Ainsi, on a une meilleure constante de stabilité , pour l'ordre 2 comme pour l'ordre 4, lorsque la matrice de rigidité est calculée exactement.

#### 4.4 Analyse de la dispersion numérique pour l'ordre 2 et l'ordre 4.

Comme pour le cas semi-discret, on ne considère que la relation de dispersion “physique” qui est donnée par:

$$\frac{4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\omega_h\right) = \beta_h$$

où  $\beta_h$  est la valeur propre physique de :

- $\hat{N}_h$  pour le schéma d'ordre 2 en temps.
- $\hat{N}_h(Id - \frac{\Delta t^2}{12}\hat{N}_h)$  pour le schéma d'ordre 4 en temps.

Ainsi, pour l'ordre 2 en temps, on a:

$$Q_h = \frac{1}{\pi\alpha K} \arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\mu'_h(2\pi K)}\right)$$

et pour l'ordre 4 en temps, on a:

$$Q_h = \frac{1}{\pi \alpha K} \arcsin \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{(\mu'_h - \frac{\alpha^2}{12} \mu_h'^2)(2\pi K)} \right)$$

où on a posé:  $\alpha = c \frac{\Delta t}{h}$ .

L'étude de la dispersion numérique est faite selon le schéma suivant :

On considère les deux paramètres:  $\psi$  et  $\alpha$ . On fixe  $\psi$  parmi les valeurs  $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ , et on trace les courbes

$$Q_h = Q_h(\alpha, K, \psi), K \in [0, \frac{1}{2}]$$

correspondant à  $\alpha = 0.05, 0.01, \dots, \alpha_{max}$ ,  $\alpha_{max}$  étant la valeur de  $\alpha$  maximum permise par la condition de stabilité obtenue pour la discrétisation considérée.

De même que pour le calcul de la condition de stabilité et le tracé des courbes de dispersion dans le cas semi-discret, n'ayant pas d'expression analytique de  $\mu'_h$ , celle-ci est calculée numériquement, point par point, sur un maillage régulier de  $[0, \frac{1}{2}]$  de pas 0.01. On mène cette étude pour la discrétisation obtenue à partir de la matrice de rigidité calculée exactement et celle obtenue à partir de la matrice de rigidité calculée par la formule de Simpson.

## 4.5 Ordre de la dispersion numérique

Si on écrit un développement limité de  $R_h = Q_h - 1$ , on sait que  $R_h = O(K^p)$  pour un certain entier  $p$ . Cet entier est appelé "ordre de la dispersion" introduit par la discrétisation. On voudrait avoir une estimation de cet ordre dans notre cas.

N'ayant pas d'expression analytique de  $\mu'_h$ , on procède de la manière suivante: on trace (toujours numériquement) la courbe  $R_h = R_h(K, \psi)$  (à  $\psi$  fixé) en échelle logarithmique. Ainsi, si on a:

$$R_h \sim C K^p$$

alors

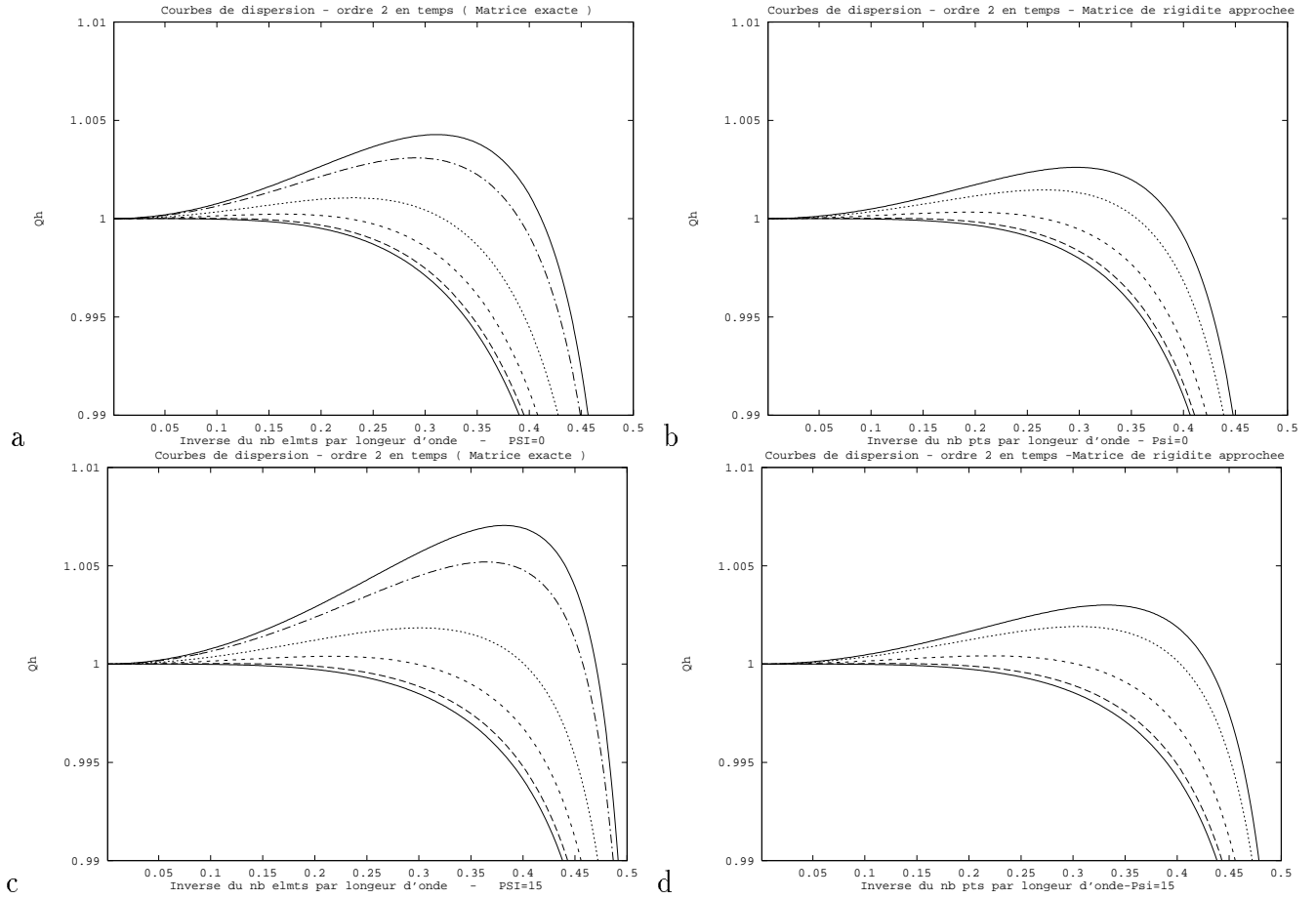


FIG. 7 - Courbes de dispersion pour la discrétisation d'ordre 2 (à gauche par le calcul exact et à droite par le calcul approché de la matrice de rigidité). Les figures a et b représentent les courbes obtenues pour  $\psi = 0^\circ$  et les figures c et d celles obtenues pour  $\psi = 15^\circ$ .

$$\log(R_h) \sim \log(C) + p \log(K)$$

et donc, la courbe obtenue aura l'allure d'une droite dont la pente donne l'ordre de la discrétisation (l'ordonnée à l'origine nous donne la constante devant  $K^p$ ).

Les calculs sont faits, là aussi, pour les deux méthodes de calcul de la matrice de rigidité et dans les deux cas, on obtient une dispersion d'ordre 4 (cf. figure 11).

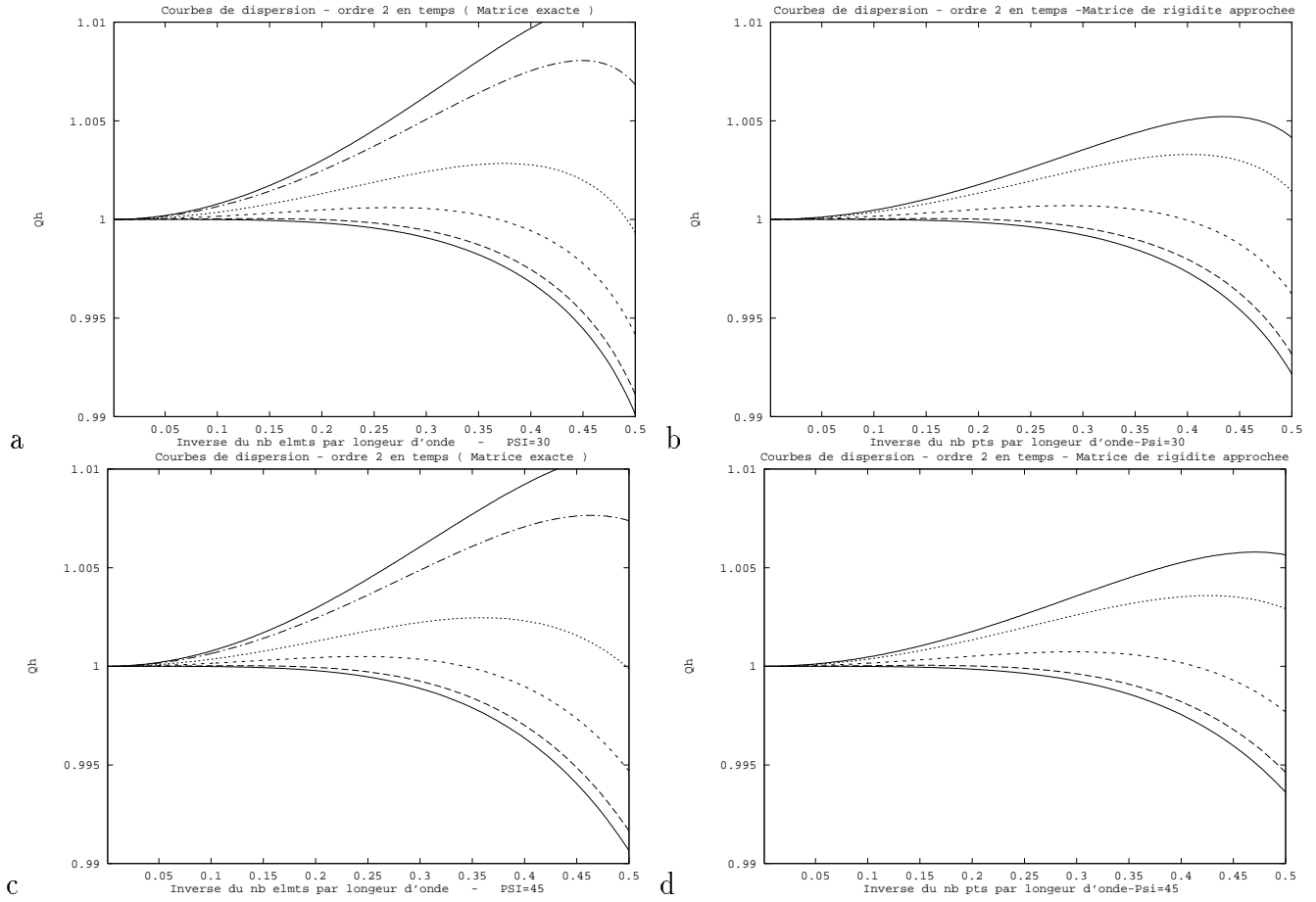


FIG. 8 - Courbes de dispersion pour la discrétisation d'ordre 2 (à gauche par le calcul exact et à droite par le calcul approché de la matrice de rigidité). Les figures a et b représentent les courbes obtenues pour  $\psi = 30^\circ$  et les figures c et d celles obtenues pour  $\psi = 45^\circ$ .



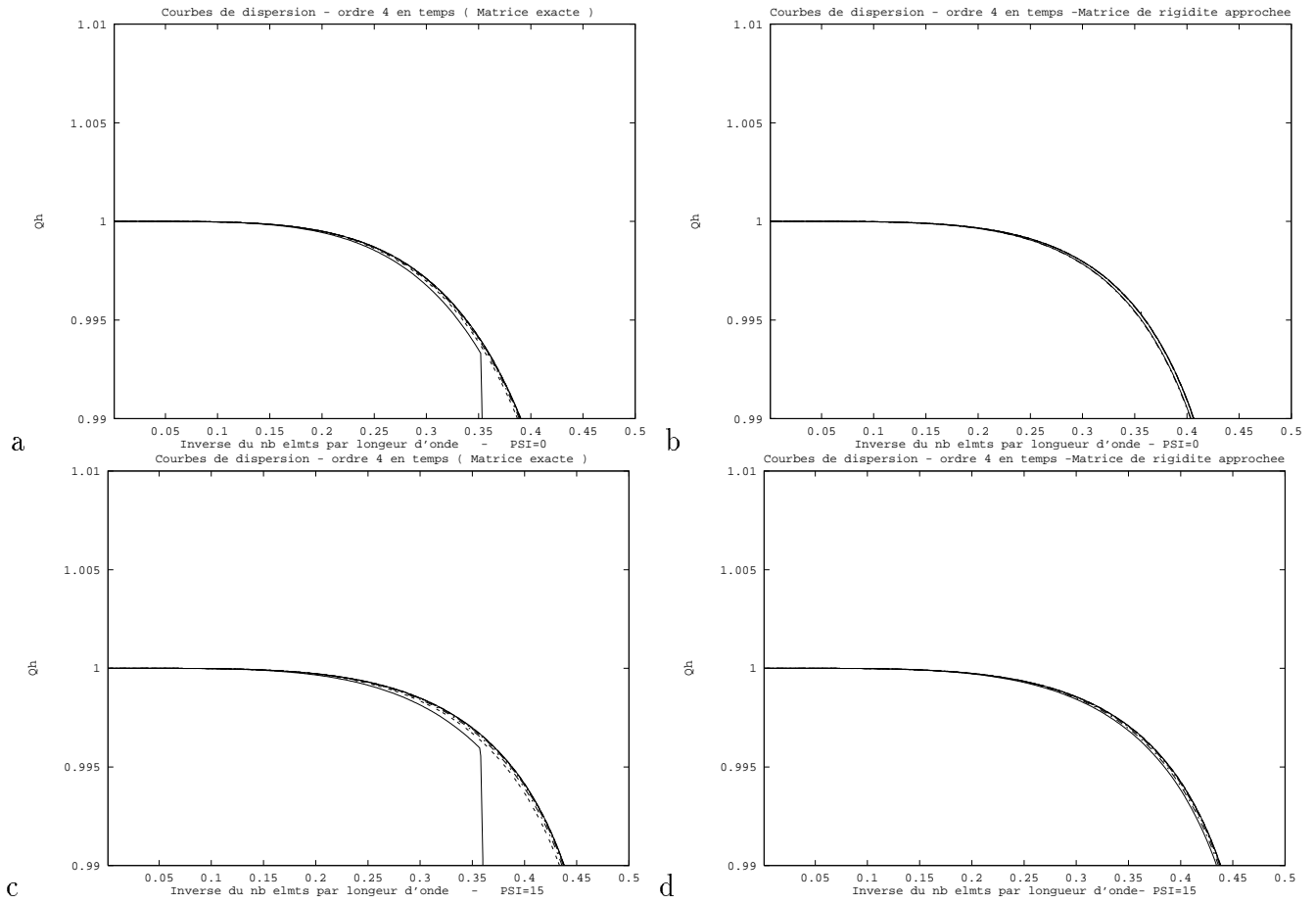


FIG. 9 - Courbes de dispersion pour la discrétisation d'ordre 4 (à gauche par le calcul exact et à droite par le calcul approché de la matrice de rigidité). Les figures a et b représentent les courbes obtenues pour  $\psi = 0^\circ$  et les figures c et d celles obtenues pour  $\psi = 15^\circ$ .

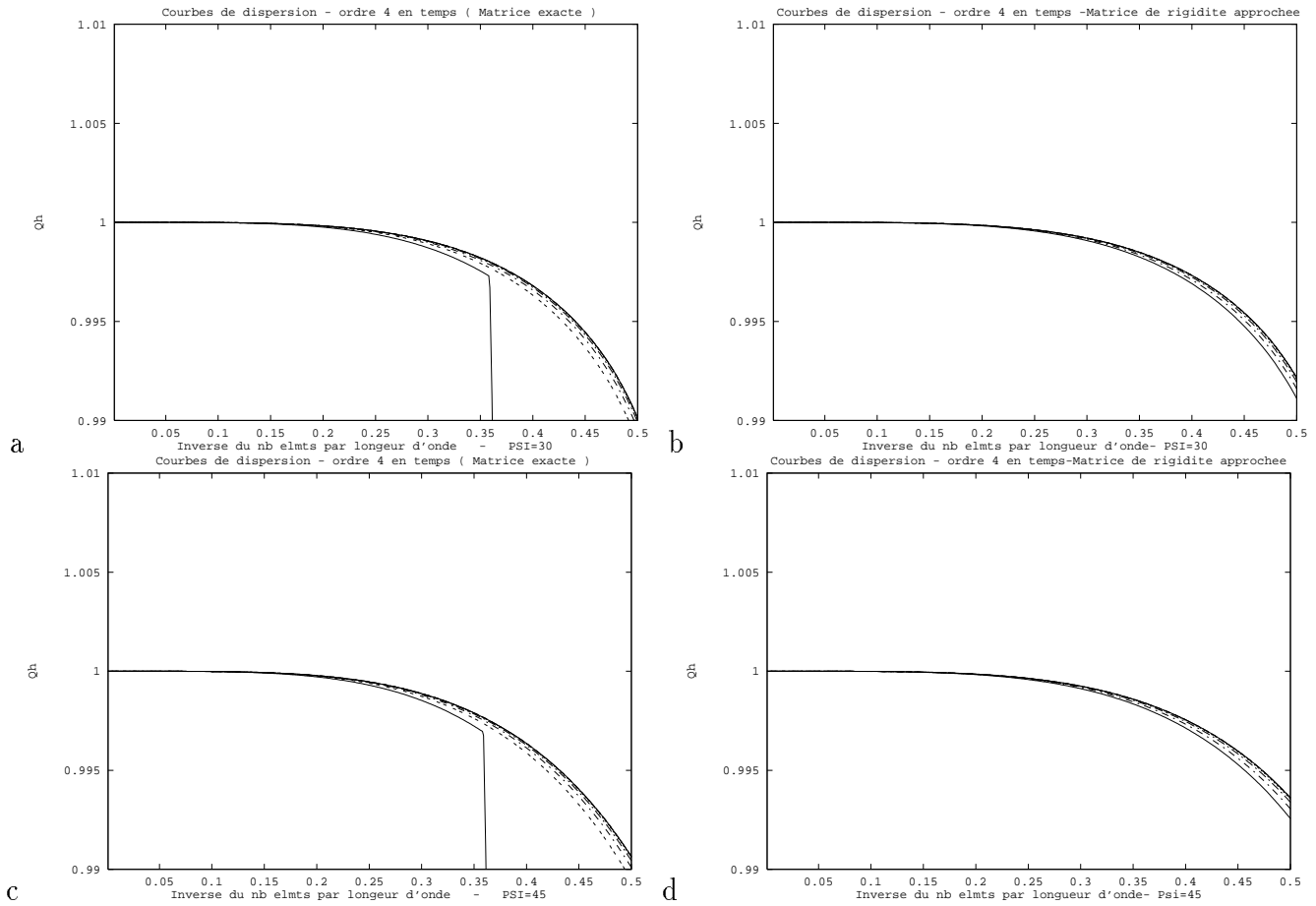
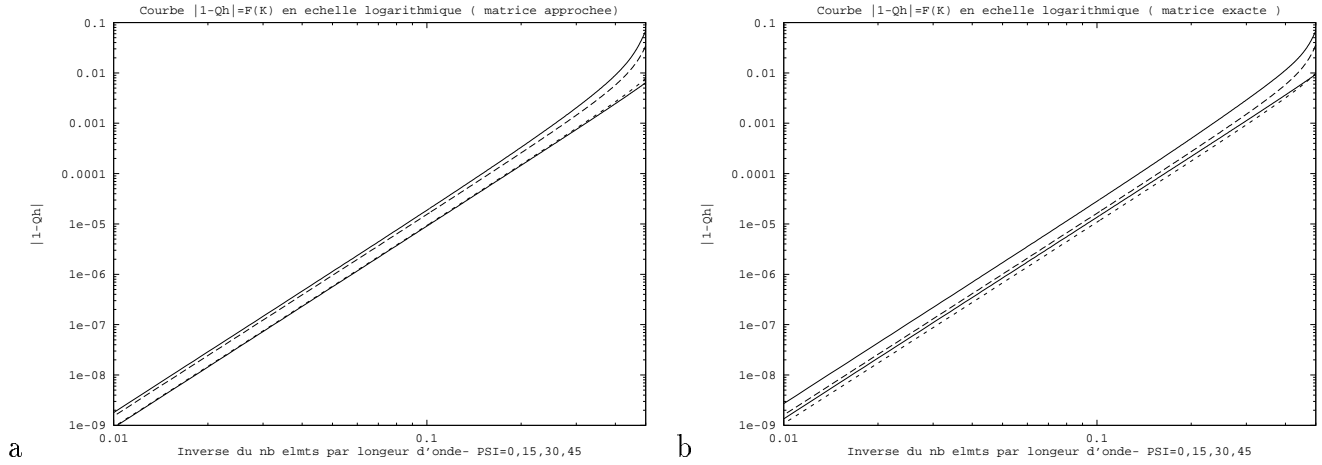


FIG. 10 - Courbes de dispersion pour la discrétisation d'ordre 4 (à gauche par le calcul exact et à droite par le calcul approché de la matrice de rigidité). Les figures a et b représentent les courbes obtenues pour  $\psi = 30^\circ$  et les figures c et d celles obtenues pour  $\psi = 45^\circ$ .

FIG. 11 - *Courbes en échelle logarithmique*

Ainsi, de même que pour les quadrilatères  $Q_2$ , la condensation de masse fait apparaître un phénomène de superconvergence puisque d'une erreur en  $O(h^3)$  pour les éléments finis triangulaires  $P_2$  classiques on passe à un erreur en  $O(h^4)$ . Par contre, on n'obtient pas la même constante devant  $K^p$ . Le calcul exact donne:

$$C_{ex} \simeq 0.27$$

et le calcul approché donne:

$$C_{app} \simeq 0.19$$

on a donc une meilleure constante de majoration lorsque la matrice de rigidité est calculée par la formule de quadrature.

## 5 Résultats numériques

Nous résolvons l'équation des ondes avec second membre sur  $\Omega = [0, 12]^2$ , définie par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) = f(t).g(x, y)$$

$$f(t) \begin{cases} 2(\frac{\pi}{1.31})^2(2(\frac{\pi}{1.31})^2(t - 1.35)^2 - 1) \exp(-(\frac{\pi}{1.31})^2(t - 1.35)^2) & \forall t \in [0, 3.48] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x, y) = \exp(-7[(x - 6)^2 + (y - 6)^2])$$

On choisit d'utiliser le schéma obtenu en calculant la matrice de rigidité de manière exacte. En effet, pour une perte de précision très faible par rapport au schéma qui correspond à un calcul approché, on dispose d'une condition de stabilité moins restrictive.

On laisse évoluer la solution pendant 50 secondes.

On représente les sismogrammes au point de coordonnées  $(9, 3)$ . Les courbes en pointillés représentent la solution exacte.

Nous faisons plusieurs types d'expériences sur maillages réguliers (cf. figures 12 à 14).

- expériences avec discrétisation en temps d'ordre 2 pour  $P_1$  et  $\tilde{P}_2$ .
- expériences avec discrétisation en temps d'ordre 4 pour  $\tilde{P}_2$ .

Pour ces expériences, nous utilisons tout d'abord des maillages avec 7.5 points par unité de longueur, puis des maillages plus raffinés de telle sorte à avoir une solution "exacte" .

On présente ici les résultats numériques obtenus sur maillage régulier triangulaire  $P_1$  dans les mêmes conditions pour avoir une idée de l'amélioration de la précision introduite par le schéma.

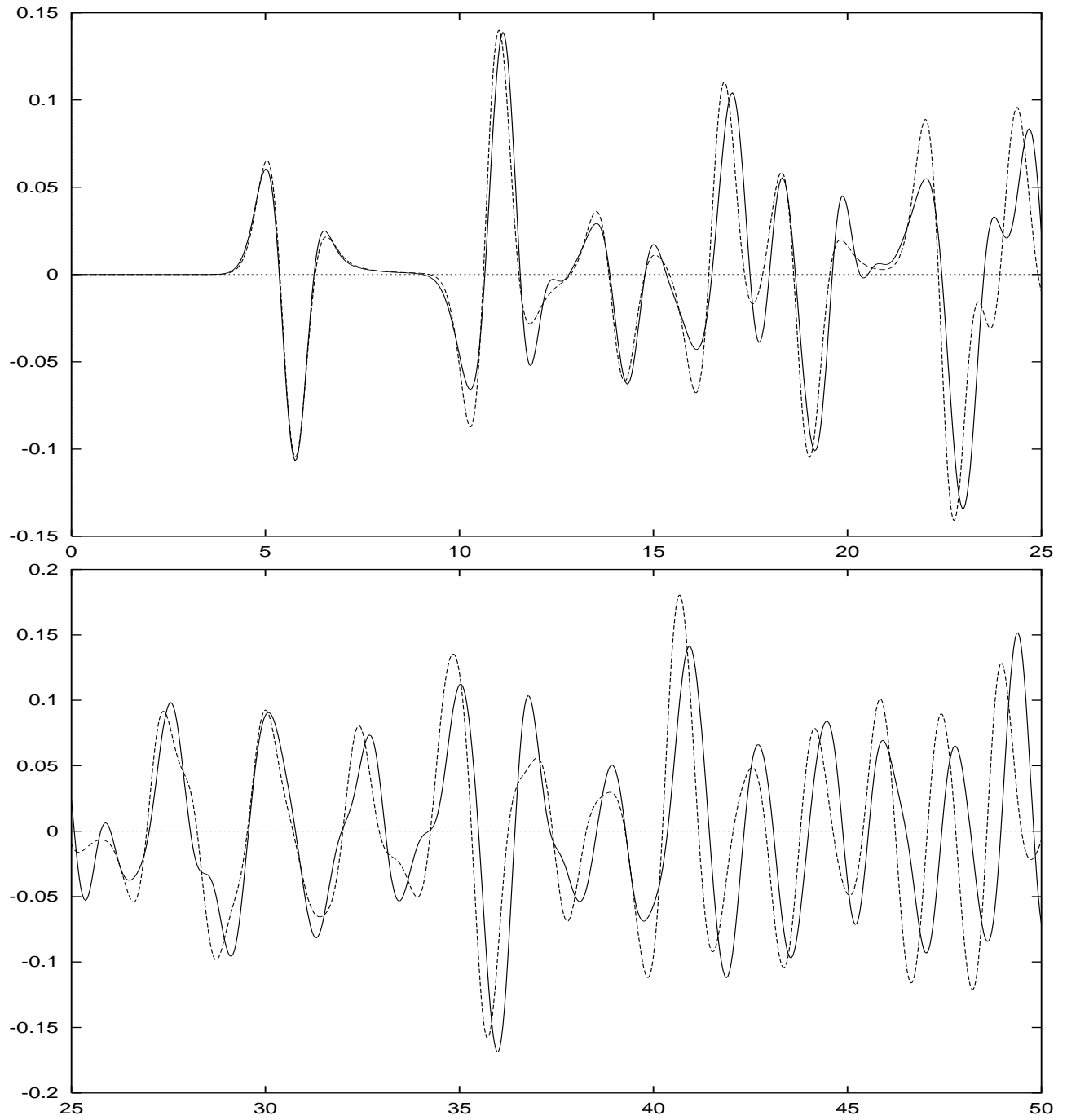


FIG. 12 - Schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_1$ :  $t \in [0, 25]$  (en haut),  $t \in [25, 50]$ , (en bas).

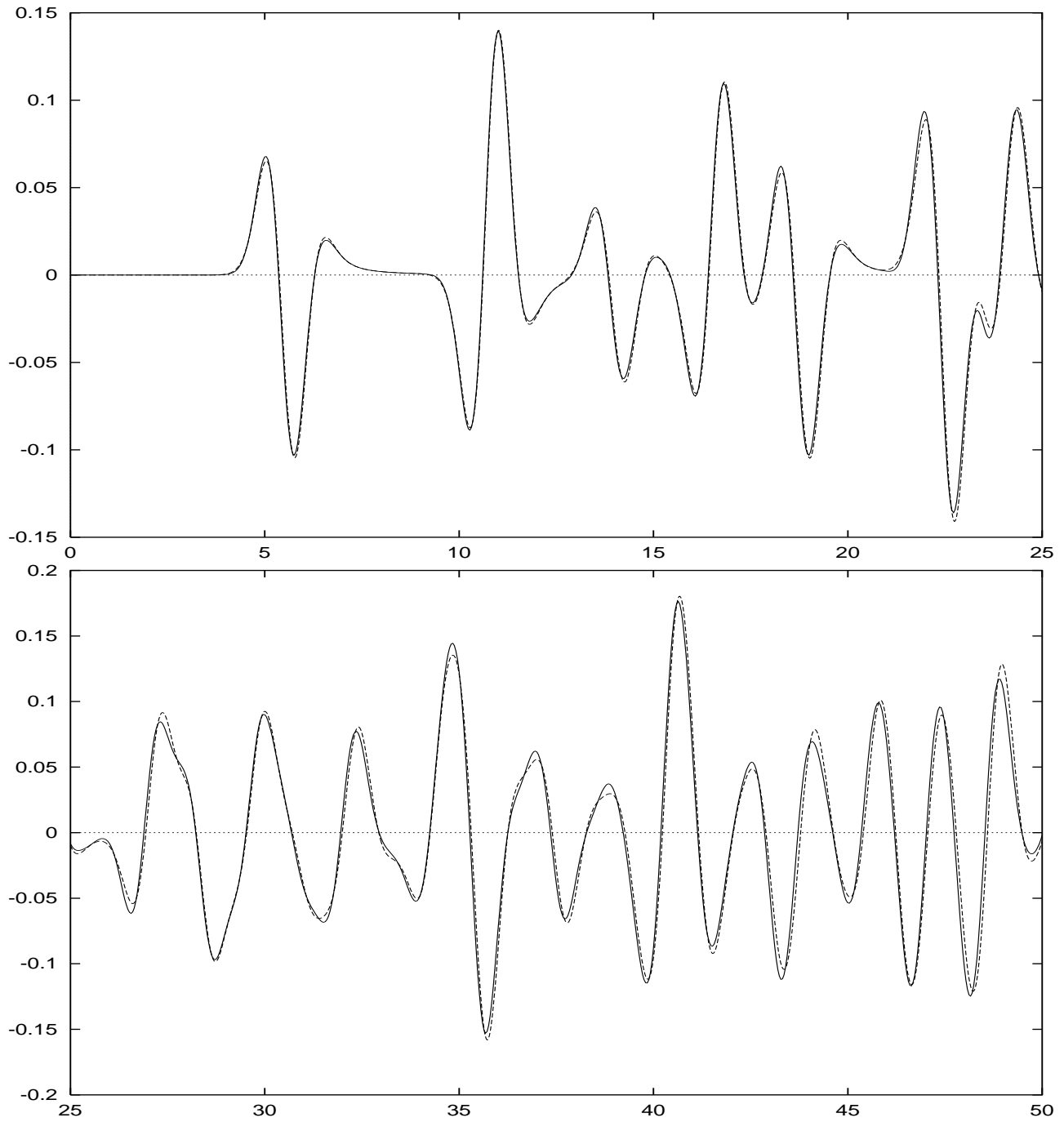


FIG. 13 - Schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $\tilde{P}_2$ :  $t \in [0, 25]$ , (en haut),  $t \in [25, 50]$ , (en bas).

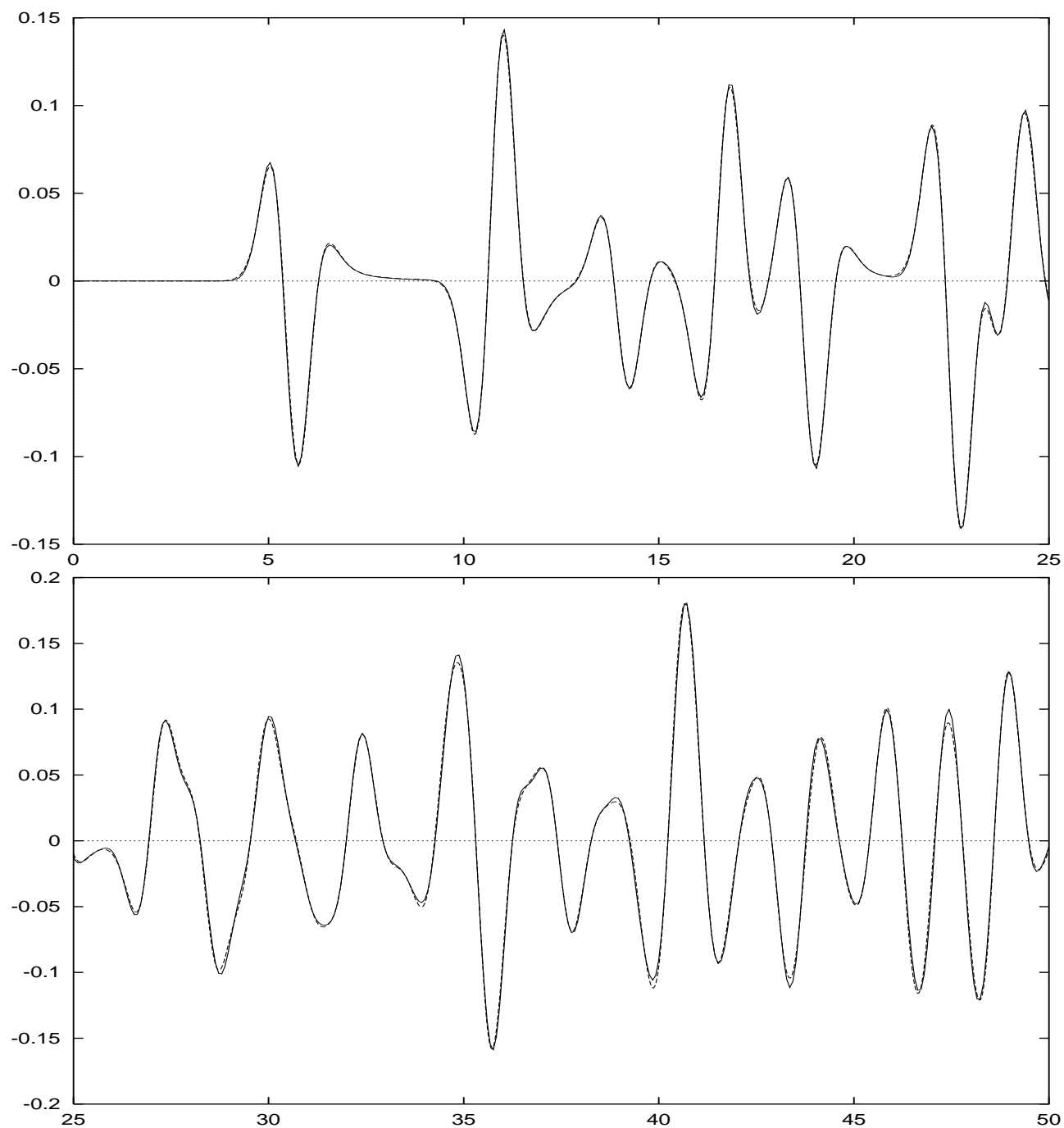


FIG. 14 - Schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $\tilde{P}_2$ :  $t \in [0, 25]$ , (en haut),  $t \in [25, 50]$ , (en bas).

## 6 Extension à la dimension 3

Nous voudrions maintenant généraliser ce type d'élément fini à la dimension trois. Il faut, pour cela, d'abord définir les degrés de liberté de l'élément fini tétraédrique appartenant à  $\tilde{P}_2$ . L'élément le plus naturel est celui dont les degrés de liberté, qui se trouvent sur ses faces, sont ceux de l'élément fini triangulaire en dimension 2, c'est à dire les sommets, les milieux des arêtes et les centres des triangles (si, au lieu des milieux des faces, on se contentait du centre du tétraèdre, la fonction "bulle" correspondant à ce point serait dans  $P_4$ ).

L'élément étant défini, il nous faut maintenant chercher une formule de quadrature exacte pour  $P_3$  et dont les nœuds correspondent aux degrés de liberté de cet élément. Les symétries font qu'en fait, il suffit de déterminer les poids  $\omega_1$  correspondant aux sommets,  $\omega_2$  correspondant aux milieux des sommets et  $\omega_3$  correspondant aux centres des faces.

En écrivant que cette formule de quadrature est exacte pour les constantes, on obtient :

$$(0.43) \quad 4\omega_1 + 6\omega_2 + 4\omega_3 = \frac{1}{6}$$

En écrivant, de même, que cette formule de quadrature est exacte pour les monômes  $xy$  et  $xyz$ , on obtient les équations :

$$(0.44) \quad \frac{1}{4}\omega_2 + \frac{2}{9}\omega_3 = \frac{1}{120}$$

$$(0.45) \quad \frac{1}{27}\omega_3 = \frac{1}{720}$$

La résolution du système (0.43)-(0.45) donne finalement :

$$(0.46) \quad \omega_1 = \frac{1}{240}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{3}{80}$$

qui n'est malheureusement pas une solution acceptable puisque l'un des poids est nul.

**Remarques:** 1. Après vérification, on montre que les poids obtenus sont bien ceux d'une formule de quadrature exacte pour  $P_3$ .

2. Un autre élément fini appartenant à  $\tilde{P}_2$  serait celui dont les degrés de liberté seraient les sommets et deux points sur chaque arête. Malheureusement, l'absence de points sur les faces fait qu'une formule de quadrature dont les nœuds correspondraient aux degrés de liberté de cet élément donnerait 0 comme valeur



de l'intégrale numérique du monôme  $xyz$ , ce qui est impossible. L'extension de cette méthode à la dimension 3 reste un problème ouvert.

## Références

- [1] P-G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems* Exercice 4.1.6, page 304, North-Holland ed., 1978.
- [2] G. Cohen, P. Joly, N. Tordjman, *Construction and analysis of higher-order finite elements with mass lumping*, proceedings of the 2nd Int. Conf. on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena, SIAM, June 1993, pp. 152-160.
- [3] Y. Maday, A. Patera, *Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, State-of-the-Art Surveys in Computational Mechanics, A. Noor ed., ASME 1989.
- [4] O.C. Zienkiewicz, C. Olgierd, R.L. Taylor, *The finite element method*, McGraw-Hill, 1991.



---

Unité de recherche Inria Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 Villers Lès Nancy  
Unité de recherche Inria Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex  
Unité de recherche Inria Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1  
Unité de recherche Inria Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex  
Unité de recherche Inria Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex

---

Éditeur  
Inria, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
ISSN 0249- 6399